Chapitre E

Application à la résolution d'EDP

Dans ce chapitre nous donnons quelques exemples de résolution d'EDP par les méthodes décrites dans ce cours.

E.1. Le problème de Dirichlet homogène

Dans ce paragraphe nous considérons Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, dont la frontière est notée Γ et nous supposons pour simplifier que Ω est de classe C^∞.

E.1.1. Résolution du problème de Dirichlet. Nous cherchons une fonction $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\begin{aligned} -\Delta u + au &= g\,, \quad x \in \Omega \\ u &= 0\,, \quad x \in \Gamma \end{aligned} \tag{E.1}$$

avec $a \in C(\overline{\Omega})$ et $a \geq 0$ dans Ω, où l'on rappelle que

$$\Delta := \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

désigne le Laplacien par rapport aux variables d'espace. La fonction g est donnée, la condition aux bords $u(x) = 0$ si $x \in \Gamma$ est la condition aux limites de Dirichlet.

Définition E.1.1. *Une solution classique de* (E.1) *est une fonction* $u \in C^2(\overline{\Omega})$ *vérifiant* (E.1). *Une solution faible de* (E.1) *est une fonction* $u \in H_0^1(\Omega)$ *vérifiant*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega auv \, dx = \int_\Omega gv \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)\,.$$

Remarque. On vérifie facilement que toute solution classique est une solution faible.

Théorème E.1.2. *Pour tout* $f \in L^2(\Omega)$ *il existe* $u \in H_0^1(\Omega)$ *unique solution faible de* (E.1). *De plus u s'obtient par le principe de Dirichlet, il vérifie*

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u|^2 + au^2)\, dx - \int_\Omega gu \, dx = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} \Big\{ \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla v|^2 + av^2)\, dx - \int_\Omega gv \, dx \Big\}\,.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de Lax-Milgram (et l'inégalité de Poincaré de la Proposition C.6.12) dans l'espace de Hilbert $H = H_0^1(\Omega)$ avec la forme bilinéaire

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega auv \, dx$$

et la forme linéaire

$$f(v) := \int_\Omega gv \, dx\,.$$

Le théorème est démontré. $\square$

Remarque. On peut démontrer (et c'est difficile, ce sera admis ici) que la solution construite ci-dessus vérifie en fait que $u \in H^2(\Omega)$ et

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|g\|_{L^2(\Omega)} .$$

Plus généralement

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C\|g\|_{H^m(\Omega)} .$$

et en particulier si $m > d/2$ alors $u \in C^2(\overline{\Omega})$.

E.1.2. Fonctions propres et décomposition spectrale.

Théorème E.1.3. *Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$. Il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^2(\Omega)$ et il existe une suite de réels strictement positifs tendant vers l'infini $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que*

$$e_n \in H_0^1(\Omega) \quad \forall n \in \mathbb{N} ,$$

et

$$-\Delta e_n = \lambda_n e_n \quad dans \quad \Omega . \tag{E.2}$$

On dit que les λ_n sont les valeurs propres de $-\Delta$ avec conditions de Dirichlet, et que les e_n sont les fonctions propres associées.

Démonstration. Pour tout $f \in L^2(\Omega)$ on note $u = Tf$ l'unique solution dans $H_0^1(\Omega)$ (voir le Théorème E.1.2) du problème

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) .$$

On considère T comme un opérateur de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et on vérifie (grâce à l'injection compacte de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, voir le Théorème C.6.16) que T est un opérateur auto-adjoint compact. Par ailleurs on a $\operatorname{Ker} T = \{0\}$ et

$$\forall u \in L^2(\Omega) , \quad (Tu|u)_{L^2(\Omega)} \geq 0 .$$

Grâce à la Proposition D.3.3 et au Théorème D.3.5 on obtient que $L^2(\Omega)$ admet une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formée de vecteurs propres de T associés à des valeurs propres $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\mu_n > 0$ et $\mu_n \to 0$ quand n tend vers l'infini. On a donc $e_n \in H_0^1(\Omega)$ et

$$\int_\Omega \nabla e_n \cdot \nabla v \, dx = \frac{1}{\mu_n} \int_\Omega e_n v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) .$$

Donc e_n est une solution faible de (E.2) avec $\lambda_n = \mu_n^{-1}$. Le théorème est démontré. □

Remarque. La régularité elliptique évoquée au paragraphe précédent permet de montrer que $e_n \in C^\infty(\Omega)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

E.2. L'équation de la chaleur dans un domaine borné

Dans ce paragraphe nous considérons comme au paragraphe précédent Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$. On note Γ sa frontière. Nous cherchons à résoudre l'équation de la chaleur

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u - \Delta u = 0 , \quad & t \in \mathbb{R}^+ , \quad x \in \Omega \\ u = 0 , \quad & t \in \mathbb{R}^+ , \quad x \in \Gamma \\ u(0,x) = u_0(x) , \quad & x \in \Omega . \end{aligned} \tag{E.3}$$

La condition $u(t,x)=0$ si $x\in\Gamma$ signifie que la température au bord est maintenue nulle. On pourrait envisager la condition de Neumann exprimant la nullité du flux de chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial n}=0\,,\quad x\in\Gamma$$

où n est le vecteur normal unitaire extérieur à Γ, ou encore d'autres conditions aux limites que nous ne détaillerons pas ici. On sait par le Théorème E.1.3 qu'il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^2(\Omega)$ constituée de fonctions propres de $-\Delta$ avec condition au bord de Dirichlet. On cherche alors une solution de (E.3) sous la forme

$$u(t,x)=\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n(t)e_n(x)$$

et on a nécessairement

$$\frac{da_n}{dt}+\lambda_n a_n=0$$

et donc

$$a_n(t)=a_n(0)e^{-\lambda_n t}$$

avec les $a_n(0)$ déterminés par

$$u_0(x)=\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n(0)e_n(x)\,.$$

Il reste alors à expliciter la convergence de la série, la régularité de u etc.

E.3. L'équation de la chaleur dans l'espace entier

On cherche une distribution $E_d\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^d_x)$ telle que

$$(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{2}\Delta)E_d=\delta_{(0,0)}\quad\text{dans}\quad\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^d_x\,.\tag{E.4}$$

On suppose que le support de E_d est dans $\mathbb{R}^+_t\times\mathbb{R}^d_x$. On note $\widehat{E}_d(t,\xi)$ la transformée de Fourier partielle de E_d en la variable x : elle est définie par la formule

$$\langle\widehat{E}_d,\varphi\rangle:=\langle\mathcal{F}_xE_d,\varphi\rangle:=\langle E_d,\mathcal{F}_x\varphi\rangle\,,\quad\forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^d_x)\,.$$

On vérifie sans difficulté que le membre de droite de l'égalité ci-dessus définit bien une distribution tempérée sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^d_x)$. On montre facilement que la transformée de Fourier partielle est un isomorphisme de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^d_x)$ sur lui-même, dont l'inverse est donné par la formule

$$\langle\mathcal{F}_x^{-1}E_d,\varphi\rangle=\langle E_d,\mathcal{F}_x^{-1}\varphi\rangle\,,\quad\forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^d_x)\,,$$

ou encore

$$\mathcal{F}_x^{-1}E_d=(2\pi)^{-d}\mathcal{F}_xE_d\circ J\,,\quad J:(t,x)\mapsto(t,-x)\,.$$

Théorème E.3.1. *Pour tout $d\geq 1$ posons*

$$E_d(t,x):=\frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{2t}}\mathbf{1}_{t>0}\,.$$

Alors E_d est l'unique distribution tempérée sur $\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^d_x$, supportée dans $\mathbb{R}^+_t\times\mathbb{R}^d_x$ et vérifiant (E.4). *Sa transformée de Fourier partielle en la variable x est*

$$\widehat{E}_d(t,\xi)=e^{-\frac{t|\xi|^2}{2}}\mathbf{1}_{t>0}\,.$$

Démonstration. La formule définissant E_d montre que E_d est continue sur $\mathbb{R}_t\setminus\{0\}\times\mathbb{R}^d_x$, à support dans $\mathbb{R}^+_t\times\mathbb{R}^d_x$ et vérifie

$$\forall t>0\,,\quad \int_{\mathbb{R}^d} E_d(t,x)\,dx = 1\,.$$

En particulier puisque E_d est positive ou nulle, on a

$$E_d \in L^\infty(\mathbb{R}^+;L^1(\mathbb{R}^d))$$

donc elle définit bien une distribution tempérée sur $\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^d_x$. Par ailleurs la formule donnant la transformée de Fourier de la Gaussienne (voir l'exercice page 61) montre que sa transformée de Fourier partielle en x est

$$\widehat{E}_d(t,\xi) = e^{-\frac{t|\xi|^2}{2}}\mathbf{1}_{t>0}\,.$$

On a alors grâce à la formule de Leibniz (voir la Proposition B.4.10)

$$\begin{aligned}(\partial_t+\frac12|\xi|^2)\widehat{E}_d &= e^{-\frac{t|\xi|^2}{2}}\partial_t(\mathbf{1}_{t>0}\otimes 1)\\ &= e^{-\frac{t|\xi|^2}{2}}(\delta_{t=0}\otimes 1)\\ &= \delta_{t=0}\otimes 1 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)\,.\end{aligned}$$

Mais $E_d\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^d_x)$ donc $\widehat{E}_d\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^d_x)$. Les distributions tempérées $(\frac{\partial}{\partial t}+\frac12|\xi|^2)\widehat{E}_d$ et $\delta_{t=0}\otimes 1$ sont égales en tant qu'éléments de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$, et donc dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^d_x)$ par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^d_x)$.

En prenant la transformée de Fourier partielle inverse on trouve

$$(\partial_t-\frac12\Delta_x)E_d = \delta_{t=0}\otimes\delta_{x=0} \quad \text{dans} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)\,.$$

Reste à démontrer l'unicité de la solution. Supposons qu'il existe une autre distribution tempérée $\widetilde{E}_d$ vérifiant les mêmes propriétés que E_d, et soit $F_d := E_d-\widetilde{E}_d$. Le fait que $F_d\equiv 0$ est une conséquence directe du lemme ci-dessous. □

Lemme E.3.2. *Soit $F\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ telle que*

$$(\frac{\partial}{\partial t}-\frac12\Delta)F = 0 \quad \textit{dans} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^d_x)$$

avec F supportée dans $\mathbb{R}^+_t\times\mathbb{R}^d_x$. Alors $F\equiv 0$.

Démonstration. En notant τ la variable de Fourier en temps et en notant $\mathcal{F}F$ la transformée de Fourier en (t,x) de F on a

$$(i\tau+\frac12|\xi|^2)\mathcal{F}F = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)\,.$$

Mais alors en multipliant cette égalité par $-i\tau+\frac12|\xi|^2$ il vient

$$(\tau^2+\frac14|\xi|^4)\mathcal{F}F = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)\,,$$

donc $\mathcal{F}F$ est une distribution à support dans $(0,0)$. On sait par le Théorème B.4.5 que $\mathcal{F}F$ est une combinaison linéaire finie de la masse de Dirac en $(0,0)$ et de ses dérivées : on peut écrire

$$\mathcal{F}F = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{d+1}} a_\alpha\partial^\alpha\delta_{(0,0)}\,.$$

Mais alors

$$F = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{d+1}} \tilde a_\alpha t^{\alpha_0}x_1^{\alpha_1}\ldots x_d^{\alpha_d}$$

c'est-à-dire que F est un polynôme. Comme on a supposé que F est identiquement nulle pour $t<0$ on conclut que $F\equiv 0$. Le lemme est démontré. $\square$

E.4. L'équation de Schrödinger dans l'espace entier

Comme pour l'équation de la chaleur dans le paragraphe précédent, on cherche une distribution $E_d \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d_x)$ telle que

$$\Big(i\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}\Delta\Big)E_d = i\delta_{(0,0)} \quad \text{dans} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)\,. \tag{E.5}$$

On suppose que le support de E_d est dans $\mathbb{R}^+_t \times \mathbb{R}^d_x$. On note $\widehat{E}_d(t,\xi)$ la transformée de Fourier partielle de E_d en la variable x.

Théorème E.4.1. *Pour tout $d\geq 1$ et $\varepsilon>0$ posons*

$$E^\varepsilon_d(t,x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi(\varepsilon+i)t}^{\,d}}\, e^{-\frac{|x|^2}{2(\varepsilon+i)t}}\mathbf{1}_{t>0}\,,$$

où $\sqrt{\ }$ désigne la détermination principale de la racine carrée. Alors

$$E^\varepsilon_d \longrightarrow E_d \quad \text{dans} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$$

où E_d est l'unique distribution tempérée sur $\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^d_x$, supportée dans $\mathbb{R}^+_t\times\mathbb{R}^d_x$ et vérifiant (E.5)*. Sa transformée de Fourier partielle en la variable x est*

$$\widehat{E}_d(t,\xi) = e^{-\frac{it|\xi|^2}{2}}\mathbf{1}_{t>0}\,.$$

Remarque. Par abus on note souvent

$$E_d(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2i\pi t}^{\,d}}\, e^{-\frac{|x|^2}{2it}}\mathbf{1}_{t>0}\,.$$

Démonstration. Commençons par démontrer le lemme suivant.

Lemme E.4.2 (Transformée de Fourier des Gaussiennes complexes)**.** *Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} z>0$ et posons*

$$G_d(x,z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi z}^{\,d}}\, e^{-\frac{|x|^2}{2z}}\,, \quad x\in\mathbb{R}^d\,,$$

où $\sqrt{\ }$ désigne la détermination principale de la racine carrée. Alors la transformée de Fourier en x de G_d est la fonction définie par

$$\widehat{G}_d(\xi,z) = e^{-\frac{z|\xi|^2}{2}}\,.$$

Démonstration. La fonction $(x,z)\mapsto G_d(x,z)$ est continue sur $\mathbb{R}^d\times\{z\in\mathbb{C}\,/\operatorname{Re} z>0\}$ et

$$\forall x\in\mathbb{R}^d\,, \quad |G_d(x,z)| = \frac{1}{(2\pi|z|)^{\frac{d}{2}}}\, e^{-\frac{\operatorname{Re} z|x|^2}{2|z|^2}}\,.$$

On a donc

$$\int_{\mathbb{R}^d} \sup_{\operatorname{Re} z>a, |z|\leq R} |G_d(x,z)|\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{(2\pi a)^{\frac{d}{2}}}\, e^{-\frac{a|x|^2}{2R^2}}\,dx = \frac{R^d}{a^d}\,.$$

Comme la fonction $z\mapsto G_d(x,z)$ est holomorphe dans $\{z\in\mathbb{C}\,/\operatorname{Re} z>0\}$ on en déduit que

$$z\mapsto \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi}G_d(x,z)\,dx \quad \text{est holomorphe dans} \quad \{z\in\mathbb{C}\,/\operatorname{Re} z>0\}\,.$$

Cette fonction coïncide, lorsque z parcourt $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, avec

$$z \mapsto e^{-\frac{1}{2}z|\xi|^2}$$

qui est également holomorphe dans $\{z \in \mathbb{C} \,/\, \mathrm{Re}\, z > 0\}$. Par le Théorème des zéros isolés on en déduit qu'elles coïncident sur l'ouvert connexe $\{z \in \mathbb{C} \,/\, \mathrm{Re}\, z > 0\}$. □

Revenons à la démonstration du Théorème E.4.1. On a comme dans le cas de l'équation de la chaleur

$$(i\partial_t + \frac{1}{2}|\xi|^2)\widehat{E}_d = \delta_{t=0} \otimes 1 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)\,.$$

En multipliant par $e^{\frac{1}{2}it|\xi|^2}$ il vient

$$\begin{aligned} i\partial_t(e^{\frac{1}{2}it|\xi|^2}\widehat{E}_d) &= e^{\frac{1}{2}it|\xi|^2}(i\partial_t\widehat{E}_d + \frac{1}{2}|\xi|^2\widehat{E}_d) \\ &= ie^{\frac{1}{2}it|\xi|^2}\delta_{t=0} \otimes 1 \qquad\qquad = i\delta_{t=0} \otimes 1 \quad \text{dans} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)\,. \end{aligned}$$

Mais alors au vu de la condition sur le support de $\widehat{E}_d$ il vient

$$e^{\frac{1}{2}it|\xi|^2}\widehat{E}_d = \mathbf{1}_{t>0} \otimes 1 \quad \text{dans} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)\,.$$

En multipliant à nouveau par $e^{\frac{1}{2}it|\xi|^2}$ on conclut que l'unique solution du problème de Cauchy pour $\widehat{E}_d$ est donnée par

$$\widehat{E}_d(t,\xi) = \mathbf{1}_{t>0}e^{-\frac{1}{2}it|\xi|^2}$$

qui est mesurable et bornée, et définit donc bien une distribution tempérée sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. La transformée de Fourier partielle inverse fournit la solution du problème initial, reste à montrer que c'est la limite de E_d^ε quand ε tend vers 0. Pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$|E_d^\varepsilon(t,x)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi t(1+\varepsilon^2)}^d}\mathbf{1}_{t>0}e^{-\frac{\varepsilon|x|^2}{2t(1+\varepsilon^2)}}$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}^d} |E_d^\varepsilon(t,x)|\, dx = \frac{(1+\varepsilon^2)^{\frac{d}{2}}}{\varepsilon^{\frac{d}{2}}}\mathbf{1}_{t>0}\,.$$

On a donc $E_d^\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^1(\mathbb{R}^d))$ et donc $E_d^\varepsilon \in d\mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ pour tout $\varepsilon > 0$. D'après le Lemme E.4.2 on a

$$\widehat{E}_d^\varepsilon(t,\xi) = \mathbf{1}_{t>0}e^{-\frac{t|\xi|^2}{2(i+\varepsilon)}}$$

donc par convergence dominée

$$\widehat{E}_d^\varepsilon \to \widehat{E}_d \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)\,, \quad \varepsilon \to 0\,.$$

La transformée de Fourier partielle inverse étant continue de $\mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ on en déduit le résultat cherché. □